数理解析研究所講究録
617巻 1987年 206-217

Moret-Bailly族とその応用

横浜市大文理 桂 利行 (Toshiyuki KATSURA)

§0. 序

Moret-Baillyは，標数 $p>0$ において，$\mathbb{P}^1$上のprincipally polarized abelian surfacesのfamilyでconstant moduliではないものを構成した([6],[7]およびOort[9]参照)。これは標数0のときには存在し得ないfamilyである(Oort[9]参照)。本稿では，今までに得られたMoret-Bailly familyの2つの応用をまとめる。第1の応用はprincipally polarized abelian surfacesのmoduli variety $A_{2,1}$に関するもので，このfamilyを用いて，$A_{2,1}$におけるsupersingular abelian surfacesに対応する点のlocusのなすsubscheme Vのirreducible componentの数を数えることができる。第2の応用はKummer surfaceのunirationalityに関するもので，このfamilyを用いて，標数 $p\geqq 3$ において，supersingular abelian surfaceからつくったKummer surfaceがunirationalであるという塩田の定理

([14]参照）の新しい証明を与えることができる。詳しい内容はそれぞれ Katsura-Oort [4], Katsura [3] にある。

§1. Moret-Bailly family

本節では Moret-Bailly family について整理する。k を標数 $p>0$ の代数的閉体とし，$\alpha_p = \mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^p)$ を k 上の local-local groups scheme とする。α_p は

$$\begin{array}{cccc} m^*: & k[\varepsilon]/(\varepsilon^p) & \longrightarrow & k[\varepsilon]/(\varepsilon^p)\otimes k[\varepsilon]/(\varepsilon^p) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \varepsilon & \longmapsto & \varepsilon\otimes 1 + 1\otimes\varepsilon \end{array}$$

によって積 $m: \alpha_p\times\alpha_p \longrightarrow \alpha_p$ が定義されている。

A を k 上 g 次元の abelian variety とする。$\mathrm{Hom}(\alpha_p,\alpha_p)\cong k$ であるから，$\mathrm{Hom}(\alpha_p, A)$ を k 上の right vector space とみなすことができる。

$$a(A) = \dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, A)$$

とおく。$0\leqq a(A)\leqq g$ が成立する。$g=1$ のときには，$a(A)=1$ となる elliptic curve を supersingular elliptic curve，$a(A)=0$ となる elliptic curve を ordinary elliptic curve という。次の2つの定理は基本的である。

定理 1.1 (Oort [10]). A が g 個の supersingular elliptic curves の直積に同型になるための必要十分条件は $a(A)=g$ となることである。

定理 1.2 (Deligne－Serre－Ogus). $E_1, \cdots, E_{2n}$ $(n \geqq 2)$ を supersingular elliptic curves とする。そのとき

$$E_1 \times \cdots \times E_n \cong E_{n+1} \times \cdots \times E_{2n} \quad (\text{同型})$$

が成立する。

(わかりやすい証明が Shioda[13] にある。)

E を 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上定義された supersingular elliptic curve で, End(E) が $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義されているものとする(こういう elliptic curve の存在はよく知られている)。以下,

$$A = E \times E$$

とおく。$(i, j) \in k \times k \setminus \{(0,0)\}$ とし, (i, j) によって定義される α_p の埋め込み

$$\alpha_p \xhookrightarrow{(i,j)} \alpha_p \times \alpha_p \subset E \times E = A$$

を考える。この像は i と j の比のみによってきまるから, $a = \frac{j}{i}$ とおいて, 以下 $(1, a)$ を考える。ただし, $a = \infty$ は, $(0, 1)$ を表わすものとする。

定理 1.3 (Oort[13]). $E \times E/(1, a)\alpha_p$ が2つの supersingular elliptic curves の直積に同型になるための必要十分条件は, $a \in \mathbb{F}_{p^2}$ 又は $a = \infty$ となることである。とくに, $E \times E/(1,a)\alpha_p$ が, 2つの supersingular elliptic curves の直積に同型になるような a の値は丁度 $p^2 + 1$ 個存在する。

こういう埋め込みを一斉に考えるために, A の零点におけ

る tangent space T_A をとる。これは A に対応する Lie algebra となるが，T_A の1次元 Lie subalgebra と，A の subgroup scheme で α_p と同型なものが1対1に対応する。そこで，

$$S=\mathbb{P}(T_A)\ ,\ K_S=\alpha_p\times\alpha_p\times S\ ,\ A_S=E\times E\times S$$

とおく。(X,Y) を S の homogeneous coordinate とする。
$K_S=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S[\alpha,\beta]/(\alpha^p,\beta^p)$ とかけるが，この中で $Y\alpha-X\beta=0$ によって定義される S 上の subgroup scheme を H とする。
$\mathfrak{X}=A_S/H$ とおけば，次のような group schemes の diagram を得る：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] & A_S \arrow[r] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \ (\text{exact}). \\
& A & & S=\mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

ただし，π は自然な射影；pr_1, pr_2 は各々の成分への射影，f は pr_2 から誘導された morphism である。こうして，supersingular abelian surfaces の family $f:\mathfrak{X}\longrightarrow S$ を得る。定理1.3によって，supersingular elliptic curves の直積に同型になるような fibre は丁度 p^2+1 個存在し，その他の fibre は elliptic curves の直積にはならない。

さて，L を A 上の invertible sheaf，A^t を A の dual とする。A の元 x による translation を T_x とかけば

$$\varphi_L : A\longrightarrow A^t \quad (x\longmapsto T_x^*L\otimes L^{-1})$$

なる homomorphism をうる。

$$K(L) = \mathrm{Ker}\ \varphi_L$$

とおく。

ここで，$f: \mathcal{X} \longrightarrow S$ に relative principal polarization を入れることを考える。以下，char. $k = p \geqq 3$ を仮定する。invertible sheaf L として次の2条件をみたすものを考える：

(i) L は symmetric，即ち，A の inversion を ι とするとき $\iota^* L \cong L$。

(ii) $K(L) \cong \alpha_p \times \alpha_p$

(こういう L の存在は Moret-Bailly [7] で示されている。)

しからば，Mumford [8] の descent theory の relative version (Moret-Bailly [7] 参照) を用いて，$\mathcal{X}$ 上の invertible sheaf M で

$$pr_1{}^* L \cong \pi^* M$$

をみたすものが存在する。さらに，$f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の構成から，$\mathcal{X}$ 上の relative effective divisor D で

$$M \otimes f^* \mathcal{O}_S\left(\frac{p-1}{2}\right) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$$

となるものが存在することがわかる。D は non-singular irreducible surface であって，構成法から，f の D への制限

$$f|_D : D \longrightarrow S$$

は，genus 2 の stable curves の family となる。さらに詳しく言えば，elliptic curves 2個が1点でまじわってできる

stable curve になるようなfibresが丁度 $5p-5$ 個あり，それ以外のfibresは genus 2 の non-singular irreducible curves になる。即ち $\mathcal{X} \longrightarrow S$ に relative principal polarization $D \subset \mathcal{X}$ を入れることができた。このようにして構成された family $(\mathcal{X}, D) \longrightarrow S$ を Moret-Bailly family という (Moret-Bailly [6], [7] より前に Oort [9] により，その存在は知られていた)。

注意1.4. $p=2$ の場合にも，少しちがうやり方で，同様の principally polarized supersingular abelian surfaces の family $f : \mathcal{X} \longrightarrow S$ ($\mathcal{X} \supset D$ relative principal polarization) をうる。この場合もやはり，$f^{-1}(x)$ $(x \in S)$ が supersingular elliptic curves の直積になるものが丁度 2^2+1 個あり，$f|_D : D \longrightarrow S$ において，degenerate した fibres が丁度 $5 \cdot 2 - 5$ 個存在することがわかる (Moret-Bailly [6] 参照)。

§2. Moduli variety $A_{2,1}$ への応用.

k を標数 $p>0$ の代数的閉体とする。k 上定義された principally polarized abelian surfaces の coarse moduli scheme を $A_{2,1}$ と書く。$A_{2,1}$ における principally polarized supersingular abelian surface (A, Θ) に対応する点全体 V は，$A_{2,1}$ の閉集合になる。よく知られているように，$A_{2,1}$ は 3 次元の代数多様体であるが，V はその中で純 1 次元の subscheme になる (Koblitz [5] 参照)。$f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を §1 で構成された family

で，relative principal polarization Dを持っているとする。しからば，moduli の性質から，

(*)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \supset D \arrow[d, "q"'] & \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathcal{A}_{2,1} \end{tikzcd}$$

なる morphism φ が存在する。$\mathrm{Im}\,\varphi$ は V の1つの既約成分を与える。逆に次の定理が成立する。

定理 2.1 (Katsura-Oort [4]). V の任意の irreducible component は，§1 の条件 (i) (ii) をみたす invertible sheaf L を適当に選んで Moret-Bailly family を作れば，(*) における φ の image として得られる ($p=2$ のときも同様)。

これを用いて よく知られた次の命題の1つの証明を得る。

命題 2.2. $p=2$ 又は 3 とする。このときには，genus 2 の non-singular irreducible curve C で，その Jacobian variety $J(C)$ が 2個の supersingular elliptic curves の直積に同型となるようなものは存在しない。

証明) もし存在すれば，定理 2.1 より ある Moret-Bailly family の fibre として得られる。1つの Moret-Bailly family $q: \mathfrak{X} \longrightarrow S$ ($\mathfrak{X} \supset D$ relative polarization) の中で，$q^{-1}(x)$ が supersingular elliptic curves の直積に同型となるものの数は先にのべたように p^2+1 個。$q|_D: D \longrightarrow S$ において，

degenerateするfibreは先にのべたように $5p-5$ 個。よって，genus 2 の non-singular irreducible curve C で Jacobian $J(C)$ が supersingular elliptic curves の直積に同型となるようなものは，丁度 $p^2+1-(5p-5)=(p-2)(p-3)$ 個出てくる。従って，$p=2$ 又は 3 なら存在しない。 q.e.d.

$\mathcal{O}=\mathrm{End}(E)$，$B=\mathrm{End}(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ とおく。B は discriminant p の $\mathbb{Q}$ 上の division quaternion algebra で，$\mathcal{O}$ はその maximal order になっている。B 上の 2 次元 left vector space $V=B\oplus B$ を考える。V を definite な quaternion hermitian space とみて，その principal genus の類数を H_2' とおく。これは，p を用いて具体的に計算されている（Hashimoto - Ibukiyama [1] 参照）。定理 2.1 と Ibukiyama - Katsura - Oort [2] を用いて次の定理をうる。

定理 2.3 (Katsura - Oort [4]). V の irreducible component の数は H_2' に等しい。

系 2.4. V が irreducible $\Leftrightarrow p\leqq 11$.

§3. Shioda's theorem.

k を標数 p の代数的閉体とする。algebraic surface X は projective space $\mathbb{P}^2$ と birational であるとき rational surface といわれる。また X は，$\mathbb{P}^2$ からの generically surjective rational mapping が存在するとき，unirational surface といわれる。

rational surface は unirational surface である。$p=0$ ならば，Enriques - Castelnuovo の rationality 判定条件が使えて，unirational ならば rational になるが，$p>0$ ならば，これはかならずしも成立しない。K3 surface X については，次のような conjecture がある。

Conjecture (Artin - Shioda). char $k = p > 0$ とし，K3 surface X を考える。このとき次は同値であろう。

$$X : \text{unirational} \iff \text{Picard 数 } \rho(X) = \text{第2Betti数 } B_2(X)$$

X が K3 surface ならば $B_2(X)=22$ だから，$\rho(X)=B_2(X)$ は，$\rho(X)=22$ ということである。この Conjecture について，次のことが知られている。

1) $\Rightarrow$ は正しい (Shioda [12]).

2) $p=2$ なら Conjecture は正しい (Rudakov - Shafarevich [11]).

3) $p \geqq 3$ とする。A を任意の abelian surface，ι を A の inversion ($A \ni x$, $\iota : x \longmapsto -x$) とする。quotient surface A/ι の minimal non-singular model を $Km(A)$ とかき，Kummer surface という。これは K3 surface になる。Kummer surfaces に対しては Conjecture は正しい (Shioda [14])。

4) $p \geqq 7$ とする。generalized Kummer surfaces に対しては conjecture は正しい (Katsura [3])。

Shioda [14] による 3) の証明は,

$$y^2 = x^\ell - 1$$

で定義される non-singular complete curve C の Jacobian variety を用い, 問題を Fermat surface の unirationality 判定法に帰着させる巧妙なものである。我々は, Moret-Bailly family を用いて, 3)を示せることをいう。詳細は Katsura [3] にあるので, , Kummer surface X が $\rho(X) = 22$ をみたせば unirational になることの証明の要点をのべる。

まず, A を任意の abelian surface とし, ι を A の inversion とする。A/ι には A_1 型の特異点が 16 個あることから,

$$\rho(A) + 16 = \rho(\mathrm{Km}(A))$$

であることがわかる (Shioda)。よって,

$$\rho(\mathrm{Km}(A)) = 22 \Leftrightarrow \rho(A) = 6 \Leftrightarrow A : \text{supersingular}$$

となる。また, Shioda [14] によれば, ある supersingular abelian surface から得られる Kummer surface が unirational ならば, どんな supersingular abelian surface から得られる Kummer surface も unirational になる。よって, 以下, 特別な supersingular abelian surface から得られる Kummer surface が unirational になることを言えばよい (この部分が本質的な部分である)。

§1 で構成した $f|_D : D \longrightarrow S$ を考える。しからば, 容易にわかるように D の Albanese variety $\mathrm{Alb}(D)$ は, 2次元 supersingular

abelian surface $A = E \times E$（§1の記号で）に同型となる。
$g|_D : D \longrightarrow S$ は genus 2 の curve の family だから fibre 方向に inversion ι_D をもつが，φ をうまくとれば，$\mathrm{Alb}(D)$ の inversion ι と commute することがわかる，即ち，

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[r, "\iota_D"] \arrow[dl, "g|_D"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\varphi"] \\ S & \mathrm{Alb}(D) \arrow[r, "\iota"] & \mathrm{Alb}(D) \end{tikzcd}.$$

よって，$D/\langle \iota_D \rangle \longrightarrow \mathrm{Alb}(S)/\iota$ をうる。D/ι_D は $S = \mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ を general fibre にする ruled surface である（$p \neq 2$ に注意）。よって，D/ι_D は rational surface である。従って，$\mathrm{Alb}(D)/\iota$ 即ち $\mathrm{Km}(\mathrm{Alb}(D))$ は unirational surface である。

参考文献

[1] K. Hashimoto and T. Ibukiyama, On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms (II), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA, 28 (1981), 695-699.

[2] T. Ibukiyama, T. Katsura and F. Oort, Supersingular curves of genus two and class numbers, Compositio Math. (1985).

[3] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[4] T. Katsura and F. Oort, Families of supersingular abelian surfaces, to appear in Compositio Math.

[5] N. Koblitz, p-adic variation of the zeta-function over families defined over finite fields, Compositio Math., 31 (1975), 119–218.

[6] L. Moret-Bailly, Polarisations de degré 4 sur les surfaces abeliennes, C. R. Acad. Sci. Paris, 289 (1979), 787–790.

[7] L. Moret-Bailly, Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$, Asterisque 86 (1981), 109–140.

[8] D. Mumford, Abelian varieties, Oxford Univ. Press, 1970.

[9] F. Oort, Subvarieties of moduli spaces, Invent. Math., 24 (1974), 95–119.

[10] F. Oort, Which abelian surfaces are products of elliptic curves?, Math. Ann., 214 (1975), 35–47.

[11] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular K3 surfaces over fields of characteristic 2, Math. USSR-Izv., 13 (1979), 147–165.

[12] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann., 211 (1974), 233–236.

[13] T. Shioda, Supersingular K3 surfaces, Lect. Notes in Math. 732, Springer (1979), 564–591.

[14] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153–168.